GdT DAG - Complexe cotangent II
version champ

But : Définir le complexe cotangent pour un champ dérivé

Plan :

1. Dérivations
2. Champ tangent
3. Complexes cotangent et tangent en un point.
4. Complexe cotangent global.
5. Complexe cotangent relatif.

Ref. [HAG II - 1.4.1]

Rappel :

- dSt_k est la catégorie des champs dérivés.

  $F \in dSt_k$ est par déf un objet fibrant de $dPSt_k = \Delta^{op}\widehat{dAff_k}$ donc en particulier vérifie
  - F préserve les équivalences faibles.
  - $F(\operatorname{Spec} A \amalg \operatorname{Spec} B) \xrightarrow{\simeq} F(\operatorname{Spec} A) \times F(\operatorname{Spec} B)$
  - condition d'hyperrecouvrement

- Soit $A \in cdga_k$ $\quad \mathbb{R}\underline{\operatorname{Spec}} A := \mathbb{R}\underline{h}(\operatorname{Spec} A)$

  où $\mathbb{R}\underline{h} : dAff_k \longrightarrow dSt_k$ plongement de Yoneda modifié

- dSt_k est une cat monoïdale symétrique fermée

  On a le hom interne :

$$\mathbb{R}\underline{hom}(F,G)(X) = \operatorname{Map}_{dSt}(F \overset{h}{\times} \underline{h}_X, G) \quad \text{pour } F, G \in dSt_k,\ X := \operatorname{Spec} A$$

En particulier $\mathbb{R}\underline{hom}(*, F)(X) = \operatorname{Map}_{dSt_k}(* \overset{h}{\times} \underline{h}_X, F)$

$$\simeq \operatorname{Map}_{dSt_k}(\underline{h}_X, F) \simeq F(X)$$

§ Dérivation :

Soient $A \in \mathrm{cdga}_u$, $x : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \longrightarrow F$ un A-point.
$X = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A$, $\Pi \in A\text{-mod}$.

On définit $X[\Pi] := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,(A \oplus \Pi)$ fonctoriel en Π
où $A \oplus \Pi$ est l'extension de carré nul.
La projection $A \oplus \Pi \xrightarrow{pr_1} A$ nous donne le morphisme $X \xrightarrow{i} X[\Pi]$.
On a le foncteur
$$X[-] : A\text{-mod}^{op} \longrightarrow X/_{dSt_u}$$
$$\Pi \longmapsto X[\Pi]$$

<u>Déf</u> L'ensemble simplicial des dérivations de F dans Π au point x est défini par
$$\mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, \Pi) := \mathbb{R}\mathrm{Map}_{X/_{dSt_u}}(X[\Pi], F) \in \mathrm{Ho}(\Delta^{op}\mathrm{Ens})$$

- $\mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, \Pi)$ est fonctoriel en Π
- Soit $F \in dSt_u$ avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,B \arrow[rr, "\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}(u)"] \arrow[dr, "y"'] & \supset & X := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \arrow[dl, "x"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

$A, B \in \mathrm{cdga}_u$
$A \xrightarrow{u} B$

Soit $\Pi \in B\text{-mod}$. On notera $\Pi\!\downarrow$ le A-module obtenu par le foncteur de restriction.

$A \oplus M \downarrow$

On a
$$\begin{tikzcd}
(B\oplus M) \underset{B}{\overset{h}{\coprod}} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner_h"] & B\oplus M \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}(\cdot) := \mathbb{R}\underline{h}\,\mathrm{Spec}$ et $\mathbb{R}\underline{h}\left(\coprod_i X_i\right) \simeq \mathbb{R}\coprod_i \mathbb{R}\underline{h}(X_i)$

[HAG II Lemme 1.3.2.3]

$X_i \in dAff_k$ famille finie

On a
$$\begin{tikzcd}
X[M\downarrow] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner_h"] & Y[M] \arrow[l] \\
X \arrow[u] & Y \arrow[u] \arrow[l, "\mathbb{R}\mathrm{Spec}\, u"']
\end{tikzcd}$$

Comme $X[M\downarrow]$ est un pushout, on a $\forall \varphi : Y[M] \longrightarrow F \in {}^{Y}\!/dSt_k$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "x"] & \\
Y[M] \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & X[M\downarrow] \arrow[dr, dashed, "\exists"] & \\
& & F
\end{tikzcd}$$

On a donc le morphisme naturel $\mathbb{R}\mathrm{Map}_{Y/dSt_k}(Y[M],F) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Map}_{X/dSt_k}(X[M\downarrow],F)$

i.e $\Big\|\ \mathbb{R}\mathrm{Der}_F(Y, M) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, M\downarrow)$

* Soient $f : F \longrightarrow F' \in dSt_k$, $A \in$ calg$_k$, $x : \underbrace{\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A}_{=: X} \longrightarrow F$

On note $f(x) := f\circ x : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \longrightarrow F'$; Pour tout $M \in A$-mod on a le morphisme naturel.

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{X/dSt_k}(X[M], F) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Map}_{X/dSt_k}(X[M], F')$$

i.e $\Big\|\ \mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, M) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Der}_{F'}(X, M)$

§ Champ tangent,

On note $k[\varepsilon] := k \oplus k$ extension de carré nul.

<u>Déf</u> Le disque infinitésimal $\mathbb{D}_\varepsilon$ est défini par

$$\mathbb{D}_\varepsilon := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,(k[\varepsilon])$$

La projection $k[\varepsilon] = k \oplus k \xrightarrow{p_1} k$ induit le morphisme $* \longrightarrow \mathbb{D}_\varepsilon$
le morph. $k \longrightarrow k \oplus k$ $\qquad \mathbb{D}_\varepsilon \longrightarrow *$

<u>Déf</u> Soit $F \in dSt_k$ le champ tangent à F est défini par

$$TF := \mathbb{R}\underline{\mathrm{hom}}_{dSt_k}(\mathbb{D}_\varepsilon, F)$$ où $\mathbb{R}\underline{\mathrm{hom}}_{dSt_k}$ désigne le hom interne de dSt_k

Le morphisme $* \longrightarrow \mathbb{D}_\varepsilon$ induit la projection $\pi : TF \longrightarrow F$.
——— $\mathbb{D}_\varepsilon \longrightarrow *$ ——— le morph $e : F \longrightarrow TF$,
section naturelle de π.
(section nulle)

Donnons une description de TF en tant que préfaisceau :
Pour tout $A \in \mathrm{alg}_k$ on a $A \overset{\mathbb{L}}{\underset{k}{\otimes}} k[\varepsilon] \simeq A \oplus A$ extension de carré nul.

<u>notation</u> : $A[\varepsilon] := A \overset{\mathbb{L}}{\underset{k}{\otimes}} k[\varepsilon]$. $\qquad \overset{\shortparallel}{A[A]}$

On a $TF : \mathrm{alg}_k \longrightarrow \mathrm{Ho}(\Delta^{op}\mathrm{Ens})$
$\qquad A \longmapsto TF(A)$

$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A$ cofibrant

avec
$$\begin{aligned} TF(A) &= \mathrm{Map}_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A, TF) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Map}_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A, TF) \\ &\overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}\mathrm{Map}_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A, \mathbb{R}\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}_\varepsilon, F)) \\ &\underset{\text{adjonction}}{\simeq} \mathbb{R}\mathrm{Map}_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \overset{h}{\times} \mathbb{D}_\varepsilon, F) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Map}_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \overset{h}{\times} \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}(k[\varepsilon]), F) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] & k[\varepsilon] \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "h"] & A[\varepsilon] := A \overset{\mathbb{L}}{\underset{k}{\otimes}} k[\varepsilon] \end{tikzcd} \quad \overset{\mathbb{R}\underline{Spec}}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}\underline{Spec}(A[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner_h"] & \mathbb{R}\underline{Spec}(k[\varepsilon]) =: \mathbb{D}_\varepsilon \arrow[d] \\ \mathbb{R}\underline{Spec} A \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

... Pb.

i.e. $\mathbb{R}\underline{Spec}(A[\varepsilon]) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\underline{Spec} A \times^h \mathbb{D}_\varepsilon$

donc
$$\begin{aligned} TF(A) &\simeq \mathbb{R}Map_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec} A \overset{h}{\times} \mathbb{R}\underline{Spec}\, k[\varepsilon], F) \\ &\simeq \mathbb{R}Map_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}(A[\varepsilon]), F) \quad ? \\ &\simeq \mathbb{R}F(A[\varepsilon]) \quad \text{On doit prendre un remplacement cofibrant de } A[\varepsilon] \\ &\simeq F(A[\varepsilon]) \quad \text{car } F \text{ champ dérivé donc préserve les éq. faibles} \end{aligned}$$

$$\boxed{TF(A) \simeq F(A[\varepsilon])}$$

§ Complexe tangent et cotangent en un point

Déf [HAG II, 1.4.1.5] Soient $F \in dSt_k$, $A \in cdga_k$, $X := \mathbb{R}\underline{Spec} A$

(1) Soit $x : X \longrightarrow F$ un A-point.
On dit que F possède un complexe cotangent au point x si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\exists\, \mathbb{L}_{F,x} \in A\text{-mod}$ nul en degré $\leq -n$ tel que

$$\mathbb{R}Der_F(X, M) \underset{\text{naturel en } M}{\simeq} Map_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_{F,x}, M) \quad \forall M \in A\text{-mod} \ (+)$$

?

On appelle $\mathbb{L}_{F,x}$ le cpx cotangent de F en x.

(2) Si F possède un cpx cotangent en x, on définit le complexe tangent à F en x :

$$\mathbb{T}_{F,x} := \mathbb{R}\underline{hom}_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_{F,x}, A) \Big\} \begin{array}{l} \mathbb{R}\underline{hom}_{A\text{-mod}}(-, A) \\ \text{foncteur dualité} \end{array}$$

Prop [HAG II : 1.4.1.6]

Soit $F \in dSt_k$ et $x : (X := \mathbb{R}\underline{Spec}\, A) \longrightarrow F$ avec $A \in cdga_k$

Si F possède un cpx cotangent $\mathbb{L}_{F,x}$ au point x, alors on a le quasi iso naturel

$$\mathbb{R}\underline{hom}_{dSt_k/F}(X, TF) \simeq Map_{A\text{-mod}}(A, \mathbb{T}_{F,x}) \simeq Map_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_{F,x}, A)$$

□ $\mathbb{R}\underline{hom}_{dSt_k/F}(X, TF) \overset{def}{=} Map_{dSt_k/F}(\mathbb{R}\underline{Spec}\, A, \mathbb{R}\underline{hom}_{dSt_k}(\mathbb{D}_\varepsilon, F))$

(i) On a $\mathbb{R}\underline{hom}(*, F)(X) \overset{def}{=} Map_{dSt_k}(* \overset{h}{\times} h_X, F)$ $\forall X \in dAff_k$

induit par $* \overset{h}{\times} h_X \xrightarrow{\simeq} h_X$ $\quad \simeq Map_{dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}\, A, F)$ $\quad X = \mathbb{R}\underline{Spec}\, A$

$\simeq F(X)$

donc $\mathbb{R}\underline{hom}(*, F) \xleftarrow{\simeq} F$

Si on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X := \mathbb{R}\underline{Spec}\, A \arrow[rr] \arrow[dr, bend right, "x"'] & & \mathbb{R}\underline{hom}_{dSt_k}(\mathbb{D}_\varepsilon, F) =: TF \arrow[dl, bend left, "\pi"] \\
& F \arrow[d, "\wr"] & \\
& \mathbb{R}\underline{hom}(*, F) &
\end{tikzcd}$$

Rappel : $\pi : TF \to F$ induite par $* \longrightarrow \mathbb{D}_\varepsilon$

On a par adjonction

$$\begin{tikzcd}
X \overset{h}{\times} \mathbb{D}_\varepsilon \arrow[rr] & & F \\
X \overset{h}{\times} * \arrow[u] \arrow[urr, "x"'] & & \\
X \arrow[u, "\wr"] & &
\end{tikzcd}$$

donc $Map_{dSt_k/F}(\mathbb{R}\underline{Spec}\, A, \mathbb{R}\underline{hom}_{dSt_k}(\mathbb{D}_\varepsilon, F))$

$\simeq Map_{X/dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}\, A \overset{h}{\times} \mathbb{D}_\varepsilon, F)$

□

On a donc

$$\mathbb{R}\underline{\mathrm{hom}}_{dSt_k/F}(X, TF) \simeq \mathrm{Map}_{X/dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \overset{h}{\times} \mathbb{D}_\varepsilon, F)$$

$$\simeq \mathrm{Map}_{X/dSt_k}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}(A[\varepsilon]), F) \quad \left(=: \mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, A)\right)$$

$$\simeq \mathrm{Map}_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_{F,x}, A)$$ par hypothèse d'existence du cpx cotangent en x

$$\simeq \mathrm{Map}_{A\text{-mod}}(A, \mathbb{T}_{F,x})$$ par adjonction/dualité

⊠

* Soit $F \in dSt_k$ et

$$\begin{tikzcd} Y := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & X := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \arrow[dl, "x"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

$A, B \in alg_k$
$A \to B$

On a vu que $\forall M \in B\text{-mod}^+$, on a le morphisme naturel

$$\mathbb{R}\mathrm{Der}_F(Y, M) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Der}_F(X, M)$$

Prop Si F possède des cpx cotangents aux points x et y,
on a un morphisme naturel de B-mod

$$u^* : \mathbb{L}_{F,x} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B \longrightarrow \mathbb{L}_{F,y}.$$

[On utilise ici la pleine fidélité de $\mathbb{R}h$ sur les objets $(-n)$-connexes]
[HAG II 1.2.11.3]

Prop Soient $f : F \longrightarrow F' \in dSt_k$, $x : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \longrightarrow F$
Si F possède un complexe cotangent au point x
et F' ________________________ $f\circ x$
on a le morphisme naturel appelé différentielle de f en x

$$df_x : \mathbb{L}_{F', f\circ x} \longrightarrow \mathbb{L}_{F,x}$$

qui induit par dualité le morphisme

$$Tf_x : \mathbb{T}_{F,x} \longrightarrow \mathbb{T}_{F', f\circ x}$$

§ Complexe cotangent global :

Prenons $F \in dSt_k$ représentable i.e $\exists A \in cdga$ tq $F = \mathbb{R}\underline{Spec}\, A$

Soient $x : \underbrace{\mathbb{R}\underline{Spec}\, B}_{=:X} \longrightarrow F$ et $M \in B\text{-mod}^+$

On a
$$\mathbb{R}Der_F(X, M) \overset{def}{=} Map_{X/dSt_k}(X[M], F) = Map_{\mathbb{R}\underline{Spec}B/dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}\, B \oplus M, F)$$
$$= \mathbb{R}Map_{\mathbb{R}\underline{Spec}B/dSt_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}(B\oplus M), \mathbb{R}\underline{Spec}\, A)$$

pleine fidélité de $\mathbb{R}\underline{h}$ (Yoneda) [HAG II, cor 1.3.2.5 p69]

$$\simeq \mathbb{R}Map_{\mathbb{R}SpecB/dAff_k}(\mathbb{R}\underline{Spec}(B\oplus M), \mathbb{R}\underline{Spec}\, A)$$
$$\simeq \mathbb{R}Map_{cdga/B}(A, B\oplus M)$$
$$\simeq \mathbb{R}Map_{A/cdga}(A, A\oplus Res M) \quad (=: \mathbb{R}Der_k(A, Res M))$$
$$\simeq \mathbb{R}Map_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_A, Res M) \quad \text{par représentabilité}$$
$$\simeq \mathbb{R}Map_{B\text{-mod}}(\mathbb{L}_A \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B, M) \quad \text{par adjonction}$$

Donc pour $F := \mathbb{R}\underline{Spec}\, A$ $\forall x : \mathbb{R}\underline{Spec}\, B \longrightarrow F$,
F possède un complexe cotangent en x
$$\mathbb{L}_{F,x} := \mathbb{L}_A \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B$$

Cela motive la définition suivante

Déf $F \in dSt_k$ possède un complexe cotangent global si

(1) : $\forall A \in cdga^+$ $\forall x : \mathbb{R}\underline{Spec}\, A \longrightarrow F$
F possède un cpx cotangent $\mathbb{L}_{F,x}$ au pt x

(2) : $\forall u : B \to C \in cdga^+$ $\cancel{B}$ et $\forall$ $y := \mathbb{R}\underline{Spec}\, C \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Spec}\, B =: X$, $y \searrow F \swarrow x$

le morph. induit $u^* : \mathbb{L}_{F,x} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} C \longrightarrow \mathbb{L}_{F,y}$
est un quasi isomorphisme de C-mod

23/02/16 (9)

Théorème [HAG II prop 1.4.1.11 cor 2.2.3.3]

Soit $F \in dSt_k$ (n) géométrique
Alors F possède un complexe cotangent global qui est $(-n)$ connexe
i.e $\forall\, x : \mathbb{R}\underline{Spec}\, A \longrightarrow F$ $\quad \mathbb{L}_{F,x} \in A\text{-mod}$ nul en degré $\leq -n$

§ Complexe cotangent relatif

Soient $f : F \longrightarrow G \in dSt_k$

$x : \mathbb{R}\underline{Spec}\, A \longrightarrow F$ $\quad A \in cdga_k^{+}$
$\mathbb{R}\underline{Spec}\, A =: X$

On définit $\mathbb{R}Der_{F/G}(X,-) : Ho(A\text{-mod}^+) \longrightarrow Ho(\Delta^{op}Ens)$
comme la fibre homotopique du morph.

$$df : \mathbb{R}Der_F(X,-) \longrightarrow \mathbb{R}Der_G(X,-)$$

i.e $\forall M \in A\text{-mod}^+$

$$\mathbb{R}Der_{F/G}(X,M) = \mathbb{R}Map_{X/dSt_k/G}(X[M],F)$$

On dit que f possède un cpx cotangent relatif en x
si'l existe $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{L}_{F/G,x} \in A\text{-mod}$ nul en degré $\leq -n$
tels que

$$\mathbb{R}Der_{F/G}(X,M) \simeq \mathbb{R}Map_{A\text{-mod}}(\mathbb{L}_{F/G,x}, M) \quad \forall M \in A\text{-mod}^+$$

Si on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y := \mathbb{R}\underline{Spec}\, B \arrow[rr] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "?"] & \mathbb{R}\underline{Spec}\, A =: X \arrow[dl, "x"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

$A \to B \in cdga^+$

Alors on a un morphisme naturel $Der_{F/G}(Y,-) \longrightarrow Der_{F/G}(X,-)$
qui est représenté par $u^* : \mathbb{L}_{F/G,x} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A B \longrightarrow \mathbb{L}_{F/G,y}$

Def $f : F \to G$ possède un cpx cotangent relatif si

(1) $\forall x : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} A \to F$, f possède un cpx cotangent relatif $\mathbb{L}_{F/G,x}$ au point x.

(2) $\forall u : A \to B \in \mathrm{cdga}$ et $\forall$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} B \arrow[rr, "\mathbb{R}\mathrm{Spec}\, u"] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "\supset"] & \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} A \arrow[dl, "x"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

le morphisme induit $u^* : \mathbb{L}_{F/G,x} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B \to \mathbb{L}_{F/G,y}$ est un iso

Prop Soit $f : F \to G \in \mathrm{dSt}_k$

(1) Si F, G ont des cpx cotangent globaux
f possède un ——— relatif
Alors $\forall x : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} A \to F$, on a la suite cofibre homotopique naturel

$$\mathbb{L}_{G,x} \to \mathbb{L}_{F,x} \to \mathbb{L}_{F/G,x}$$

(2) Si f possède un cpx cotangent relatif
Alors $\forall H \to G \in \mathrm{dSt}_k$, le morphisme $F \overset{h}{\underset{G}{\times}} H \to H$ possède un cpx cotangent relatif et

$$\mathbb{L}_{F/G,x} \simeq \mathbb{L}_{F \overset{h}{\underset{G}{\times}} H / H, x} \quad \forall\, \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} A \to F \overset{h}{\underset{G}{\times}} H.$$

(3) Si $\forall A \in \mathrm{cdga}_k$ $x : X = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} A \to F$, $F \overset{h}{\underset{G}{\times}} X$ a un cpx cotangent glo.
Alors • f possède un cpx cotangent relatif
• On a la suite cofibre homotopique :

$$\mathbb{L}_A \to \mathbb{L}_{F \overset{h}{\underset{G}{\times}} X, x} \to \mathbb{L}_{F/G,x}$$